**Cálculo de resfriamento de esfera por métodos de EDO**

**Erica da Cunha Ferreira1\***

1UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil

\**erica.ferreira@poli.ufrj.br*

**Background, Motivação e Objetivo**. O cálculo de resfriamento de metais é de extrema importância para a indústria metalúrgica, para facilitar o cálculo, o objeto foi considerada uma esfera de massa concentrada, isto é, a temperatura é constante em toda a esfera. Para realizar o cálculo, será aplicado os conhecimentos adquiridos na disciplina de Matemática Computacional, como método de Euler e método de Runge-Kutta de 4ª ordem, que foram escolhidos pelas suas diferenças de acurácia, que serão mostradas adiante.

**Métodos.** O cálculo é feito por um programa em Python e recebe do usuário o material da esfera, tendo como opções, Ferro, Alumínio, Cobre e Bronze, a temperatura inicial da esfera, escala termométrica e a temperatura final da esfera, esta tendo que ser menor que a temperatura inicial e maior que a temperatura ambiente. Essa condição se deve-se que a esfera só pode esfriar, logo a temperatura inicial tem que ser maior que a final e porque como o único meio que a esfera terá contato é o ar, temperatura final não pode ser inferior à temperatura ambiente, que nesse caso é de 300° Kelvin. Apesar de deixar a escala termométrica à escolha do usuário, as temperaturas são convertidas e só então calculadas em Kelvin, para que as constantes escolhidas não precisar serem transformadas, depois é transformado os resultados para a escala escolhida para então ser plotado o gráfico. A partir da massa (10 kg), material escolhido e de sua respectiva densidade, é calculado o volume da esfera pela fórmula (1).

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Depois é calculado o raio a partir da fórmula de volume da esfera (2) e com esse valor é calculado a área de superfície da esfera(3).

)

Com esses resultados são calculados a perda por radiação (4) e a perda por convecção (5).

Sendo a emitância, que foi estipulada como 0.85,

, a constante de Stefan-Boltzmann que vale

, o coeficiente de transferência térmica, que foi estipulado como

, a temperatura inicial da esfera,

, a temperatura ambiente, 300 K.

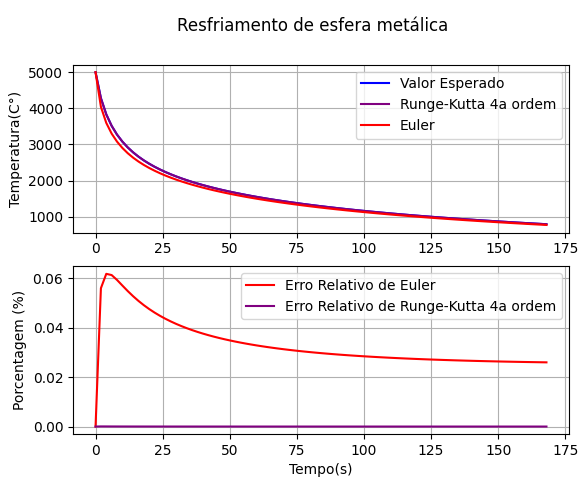
Depois, a perda por radiação e conveção são somadas e igualadas à energia armazena na esfera (6).

(6)

Logo essa equação é colocada em função da derivada de teta em relação a t, que então é calculada por Runge-Kutta de 4ª ordem, Método de Euler e por lsoda[[1]](#footnote-1) e os resultados obtidos entre a temperatura inicial e final e seus respectivos erros relativos são plotados em um gráfico.

**Resultados.** Como pode ser visto na Figura 01 abaixo, o Método de Euler (em vermelho), apesar de convergir no final, durante o resfriamento se distancia do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (em roxo) e do lsoda (em azul), que estão sendo representados por só uma linha, devido à baixa porcentagem de erro relativo entre eles.

**Figura 01 –** Gráfico de esfera de Ferro de 10 kg, temperatura inicial 5000 e temperatura final de 800.



**Tabela 01 –** Erros relativos segundo o resultado da temperatura final

|  |  |
| --- | --- |
| **Erro Relativo de Euler** | **Erro Relativo de Runge-Kutta** |
| 0.026016 | 0.000006 |

Como pode ser observado na Tabela 01, o Método de Euler tem um erro relativo bem maior que o do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem, principalmente em instantes em que a queda de temperatura é mais brusca, como entre os segundos 0 e 25, onde pode ser observado na Figura 01, um alto erro relativo de Euler, enquanto o erro relativo do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem ser tão pequeno, que ao ser plotado no gráfico é representado como 0.

**Conclusão.** Ambos os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias são eficientes porém em alguns casos o Método de Euler, assim como outros métodos de ordem inferiores, se faz necessário um passo menor que o Runge-Kutta de 4ª ordem para ter a mesma precisão, já que nos instantes com maior queda de temperatura, os erros relativos são maiores. O fato de precisar de um passo menor, se torna um limitante para quando se calcula grandes janelas de temperatura, como de 10.000 para 80, com um passo de 0.1, uma vez que apesar do Método de Euler de apresentar um erro relativo menor com passos dessas ordem, o código não consegue compilar, por falta de memória, já que deverão ser feitas muitas iterações. Por isso, pode-se concluir que o uso do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem se faz mais vantajoso para janela maiores, pois já que funciona bem mesmo com passos mais largos, não haveria problemas de memória.

**Palavras-Chave.** Runge-Kutta;Euler;EDO;convecção;radiação.

**Bibliografia:**

[1]<https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/08ode/mws_gen_ode_phy_problem.pdf>

[2] https://www.materiais.gelsonluz.com/2018/09/calor-especifico-de-metais.html

[3] <http://easypythondocs.com/validation.html>

[4] https://rdrr.io/cran/deSolve/man/lsoda.html

1. LSODA, escrito conjutamente por L. R. Petzold e Alan C. Hindmarsh, soluciona sistemas dy/dt = f com Jacobiano denso ou de quando o problema é rígido mas automaticamente seleciona entre métodos não-rígido (Adams) e rígido (BDF). [↑](#footnote-ref-1)